ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS 1974

OPTION : P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

***

Les deux exercices sont indépendants ; les candidats peuvent les traiter dans un ordre arbitraire.

Exercice I

On désigne par α un paramètre réel, par y une fonction numérique de classe C^2 de la variable réelle t vérifiant l'équation différentielle

(1) $$y'' - (\alpha + 1)\, y' + \alpha y = 1$$

a) Donner l'expression de l'intégrale générale de l'équation (1) et discuter suivant les valeurs de α.

b) Déterminer l'intégrale particulière y telle que $y(0) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(0) = 1$.

Cette intégrale est une fonction de t et de α ; démontrer qu'elle est continue en α pour tout α appartenant à $\mathbb{R}$.

c) Une fonction vectorielle fait correspondre à t un vecteur $\vec{V}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées x, y, z vérifient le système différentiel

(2)
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + (\alpha - 3)y + 2z + 2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + (\alpha - 1)y - z + 1 \\ \frac{dz}{dt} &= y + 1 \end{aligned}$$

Démontrer que la deuxième coordonnée y d'une fonction vectorielle vérifiant (2) est une intégrale de l'équation (1) correspondant à la même valeur de α.

d) Déterminer la solution de (2) qui coïncide avec le vecteur nul pour $t = 0$ en utilisant les résultats obtenus au début de l'exercice et en cherchant l'expression de $x + z$.

Cette solution dépend de α ; est-elle continue en α pour tout α réel ?

Exercice II

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de sa structure d'espace affine euclidien, la notation $d(m, m')$ désigne pour $(m, m') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la distance euclidienne des points m et m' (on pourra aussi utiliser la notation mm').

On rappelle que la distance d'un point $m \in \mathbb{R}^2$ à une partie S de $\mathbb{R}^2$ est par définition la borne inférieure des nombres $d(m, p)$ lorsque p décrit l'ensemble S, cette distance est notée $d(m, S)$.

A

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n sous-ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, à savoir $K_1, \ldots K_i, \ldots K_n$; on désigne par $d(m, K_i)$ la distance de m au sous-ensemble K_i et on pose

$$d(m, \mathcal{F}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(m, K_i)$$

qu'on appelle distance de m à la famille $\mathcal{F}$.

1°/ Montrer que l'application $m \to d(m, \mathcal{F})$ est continue, pour cela on démontrera que

$$| d(m, \mathcal{F}) - d(m', \mathcal{F}) | \leqslant d(m, m')$$

2°/ Démontrer que si l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ est vide, la borne inférieure des $d(m, \mathcal{F})$ lorsque m décrit $\mathbb{R}^2$ est un réel, a, strictement positif. Montrer que pour tout $b \geqslant a$ l'équation $d(m, \mathcal{F}) = b$ possède au moins une solution.

3°/ Déterminer la constante a et l'ensemble des solutions de l'équation $d(m, \mathcal{F}) = b$ dans les deux cas suivants (on discutera suivant les valeurs de b) :

$\mathcal{F}$ est formée de deux points A et B distincts ;

$\mathcal{F}$ est formée de deux disques, l'un K centré en un point ω, de rayon égal à 3 u, l'autre K' de rayon égal à 4 u centré en ω' tel que $d(\omega, \omega') = 10$ u. Le dessin schématisant les réponses sera exécuté en adoptant u = 1 cm.

B

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit la famille de cercles C_λ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$$

où λ est un réel positif ou nul.

On admet dans cette partie que la distance d'un point m du plan au cercle C_λ est une fonction continue de λ et de m. Soit la fonction

$$m \to g(m) = \int_0^1 d(m, C_\lambda)\, d\lambda .$$

Montrer que si m décrit un cercle C_λ de la famille, $g(m)$ est minimum en l'un des points d'intersection de ce cercle et de la droite Ox.

Déterminer la borne inférieure de g et les points où elle est atteinte.

C

A tout $t \in [0, 1]$ on fait correspondre le point p défini par

$$\overrightarrow{Op}(t) = f(t) \left[\vec{i} \cos 2\pi t + \vec{j} \sin 2\pi t \right]$$

où $f(t)$ est une fonction numérique de classe C^1 strictement positive telle que $f(0) = f(1)$ et on désigne par F l'ensemble des points p ainsi déterminés. Au couple $(\lambda, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ on fait correspondre le point $q(\lambda, t)$ tel que

$$\overrightarrow{Oq}(\lambda, t) = \lambda \overrightarrow{Op}(t)$$

1°/ Montrer que l'ensemble des points q est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est F et dont O est un point intérieur.

2°/ On désigne par F_λ l'ensemble des points q correspondant à la même valeur de la première variable λ et par a la borne supérieure de la distance de O aux points de F ; démontrer que l'application $(\lambda, m) \to d(m, F_\lambda)$ définie pour $(\lambda, m) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$ est une application continue. On montrera d'abord que

$$| d(m, F_\lambda) - d(m, F_{\lambda'}) | \leq a | \lambda - \lambda' |$$

puis on cherchera à majorer

$$| d(m, F_\lambda) - d(m', F_{\lambda'}) |$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail